Devoir maison n^o 2 - Correction

Exercice 1. *D'après ESCP opt. techno. 2022*
On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ données par $a_0 = 1$, $b_0 = 2$ et pour tout entier naturel n,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}.$$

On **admet** que cela définit deux suites de nombres réels **strictement positifs**.

Partie A - Variations

1. Calculer a_1 et vérifier que $b_1 = \sqrt{3}$.

En utilisant la définition des suites, on a $a_1 = \dfrac{a_0 + b_0}{2} = \boxed{\dfrac{3}{2}}$ et $b_1 = \sqrt{a_1 b_0} = \sqrt{\frac{3}{2} \times 2} = \boxed{\sqrt{3}}$.

2. Établir, pour tout entier naturel n, l'égalité

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2\left(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}\right)} (b_n - a_n). \qquad (✧)$$

On part de la partie du membre de droite qui semble la plus « compliquée »). On commence par multiplier par la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2\left(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}\right)} &= \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2\left(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}\right)} \times \frac{\sqrt{b_n} - \sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{b_n} - \sqrt{a_{n+1}}} \\ &= \frac{\sqrt{a_{n+1} b_n} - a_{n+1}}{2\left(b_n - a_{n+1}\right)} \\ &= \frac{b_{n+1} - a_{n+1}}{2\left(b_n - \frac{a_n + b_n}{2}\right)} \\ &= \frac{b_{n+1} - a_{n+1}}{b_n - a_n}\end{aligned}$$

Ainsi en multipliant de chaque côté par $b_n - a_n$, on obtient $\boxed{\text{l'égalité } (✧)}$.

3. En déduire par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $a_n < b_n$.

Proposition à démontrer : Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $a_n < b_n$ ».
Initialisation : Par définition $a_0 = 1$ et $b_0 = 2$ donc $a_0 < b_0$, *i.e.* $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, *i.e.* $b_n - a_n > 0$.
D'une part, comme une racine carré est toujours positive, on a $\frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2\left(\sqrt{b_n}+\sqrt{a_{n+1}}\right)} > 0$. D'autre part, d'après $\mathcal{P}(n)$, $b_n - a_n > 0$ donc par produit et via (✧), $b_{n+1} - a_{n+1} > 0$ ou encore $b_{n+1} > a_{n+1}$, *i.e.* $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a montré que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ a_n < b_n}$.

4. Utiliser l'inégalité précédente pour justifier que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

En commençant par utiliser la définition de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \overset{Q3}{>} \frac{a_n + a_n}{2} = a_n,$$

i.e. $\boxed{\text{la suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement croissante}}$.

5. Montrer que $b_n = \dfrac{b_{n+1}^2}{a_{n+1}}$, puis établir que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

- Par définition, $b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n}$, d'où en passant au carré $b_{n+1}^2 = a_{n+1}b_n$. Comme on a admis que $a_{n+1} \neq 0$ (cf début énoncé), on obtient $\boxed{b_n = \dfrac{b_{n+1}^2}{a_{n+1}}}$.
- D'après la question 3, on a $b_{n+1} > a_{n+1}$. En divisant par a_{n+1} qui est strictement positif (cf début énoncé), il vient $\dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}} > 1$. Ainsi, l'égalité précédente donne $b_n = b_{n+1} \times \dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}} > b_{n+1}$. Autrement dit, $\boxed{\text{la suite } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement décroissante}}$.

Partie B - Limite

6. En utilisant (✧), justifier, pour tout entier naturel n, l'inégalité : $b_{n+1} - a_{n+1} < \dfrac{1}{2}(b_n - a_n)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $\sqrt{b_n} > 0$, on a $\sqrt{a_{n+1}} < \sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}$ d'où $\dfrac{\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}} < 1$. Ainsi, via (✧), on obtient $\boxed{b_{n+1} - a_{n+1} < \dfrac{1}{2}(b_n - a_n)}$.

7. En déduire l'encadrement : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < b_n - a_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ puis la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n - a_n$.

- D'après la question 3, on a $0 < b_n - a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Par récurrence immédiate (la rédiger) avec l'inégalité précédente, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}(b_0 - a_0) = \dfrac{1}{2^n}(2-1) = \dfrac{1}{2^n}$, d'où l'inégalité souhaitée.
- Enfin, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$, d'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0}$.

8. En utilisant les résultats de la partie A et la question précédente, montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et ont même limite. On note ℓ cette limite commune.

D'après les questions 4, 5 et 7, les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. En particulier, d'après le théorème concernant ces suites, $\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont convergentes et ont la même limite}}$.

9. On donne $\pi \approx 3{,}14$ et $\sqrt{3} \approx 1{,}73$.
La limite commune ℓ est l'un des quatre réels suivants :

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{\pi}$ b) $\dfrac{3\sqrt{3}}{\pi}$ c) $\dfrac{3}{\pi}$ d) 3

Compte tenu de certains résultats obtenus dans cet exercice, déterminer ℓ en justifiant votre réponse.

D'après la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \ell$. Or, d'après la question 4, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc nécessairement $a_n \leqslant \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De même, par décroissante de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (Q5), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n \geqslant \ell$.
En particulier, pour $n = 0$, on a $a_0 = 1 \leqslant \ell \leqslant b_0 = 2$.

Or, parmi les quatre valeurs proposées, seule la b) vérifie cette inégalité donc $\boxed{\ell = \dfrac{3\sqrt{3}}{\pi}}$.

Exercice 2. **[Facultatif]** *Limite d'un produit*

1. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, on a $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

   On procède via deux études de fonctions, une pour chaque inégalité, comme dans l'exercice 3 du TD1.

2. Montrer la convergence et déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Afin d'utiliser la question précédente, on va s'intéresser à $\ln(u_n)$ (qui a bien un sens car on a clairement $u_n > 0$ en tant que produit de nombre strictement supérieurs à 1) :

$$\ln(u_n) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$

   D'après la question précédente avec $x = k/n^2$, on obtient l'encadrement

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{k}{n^2}\right)^2\right) \leqslant \ln(u_n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}.$$

   Or le membre de droite vaut

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n},$$

   et celui de gauche vaut

$$\frac{n+1}{2n} - \frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{2n^4} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}.$$

   Comme $\dfrac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{6n}$ tend vers 0, les membres de gauche et de droite tendent tous deux vers $\frac{1}{2}$. Ainsi d'après le théorème des gendarmes, on a aussi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \frac{1}{2}$. Finalement, par continuité de l'exponentielle, on obtient $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{e}^{1/2}}$.